УДК 519.21

З.Ф. НАЗИРОВ, канд. фіз.-мат. наук, доц., ХНУ ім. В.Н. Каразіна;
Н.В. ЧЕРЕМСЬКА, канд. техн. наук, ст. викл., НТУ „ХПІ”;
А.А. ЯНЦЕВИЧ, д-р фіз.-мат. наук, проф., ХНУ ім. В.Н. Каразіна

ПРО ОДИН КЛАС НЕОДНОРІДНИХ ВИПАДКОВИХ ПОЛІВ

У статті введено клас неоднорідних випадкових полів, який є аналогом майже стаціонарних в широкому сенсі випадкових процесів UBLS. В роботі реалізовано операторний підхід до вивчення одного класу неоднорідних випадкових полів. Розробка кореляційної теорії такого класу неоднорідних полів може бути перспективною для розв’язання багатовимірних прикладних задач.

В статье вводится класс неоднородных случайных полей, являющихся аналогом почти стационарных в широком смысле случайных процессов UBLS. В работе реализован операторный подход к изучению одного класса неоднородных случайных полей. Разработка корреляционной теории такого класса неоднородных полей может быть перспективной для решения многомерных задач.

The paper is devoted to introduce the class of inhomogeneous discrete radom fields. This fields are corresponded a wide sense stationary prcess UBLS. The way for the study of inhomogeneous discrete radom fields based on the operator methods, was proposed.

Вступ. Існує великий клас прикладних задач, для яких є характерною статистична нестаціонарність. Наприклад, поширення хвиль у турбулентній атмосфері, при дослідженні електромагнітних хвиль, які поширюються поблизу земної кулі або в іоносфері, аналізі задачі гасіння або зростання поверхневих хвиль сильною турбулентністю, що створюється об’єктом, який рухається та інші. При розв’язанні таких задач використання моделей стаціонарних випадкових процесів або однорідних випадкових полів приводить до великих похибок. Тому постає необхідність у розробці кореляційної теорії широкого класу нестаціонарних випадкових функцій, яка була б перспективною для розв’язання прикладних задач, для яких статистична нестаціонарність або неоднорідність відповідних статистичних даних істотна.

Аналіз останніх досліджень. До цього часу розроблена достатньо повна кореляційна теорія однорідних випадкових полів, а також полів з однорідними приростами [1,2,3]. Щодо кореляційної теорії інших класів неоднорідних випадкових полів, то вона розвинута лише фрагментарно. В [4] розглянуто клас так званих дисипативних еволюційно зображених полів, відповідна кореляційна теорія заснована на трикутних та універсальних моделях систем комутуючих дисипативних операторів. В роботі [5] було розглянуто спеціальний клас неоднорідних дискретних полів нескінченного рангу нестаціонарності. В [6] розглядалися майже стаціонарні в широкому сенсі випадкові процеси UBLS (uniformly bounded linearly stationary: однорідно обмежені лінійно стаціонарні). Слід відзначити, що цей клас ширше, ніж клас дисипативних випадкових процесів, який розглядався в [7]. З урахуванням обмеженості оператора зсуву, одразу можна отримати, що клас дисипативних випадкових процесів входить до класу UBLS. Слід відзначити, що лінійне перетворення дисипативної кривої в гільбертовому просторі виводить цю криву з класу дисипативних кривих.

Постановка задачі. Викликає зацікавленість розповсюдження результатів роботи [6] на деякі класи неоднорідних випадкових полів. Введення класу неоднорідних випадкових полів, який є аналогом майже стаціонарних в широкому сенсі випадкових процесів UBLS може привести до результативної кореляційної теорії неоднорідних випадкових полів.

Розв'язання. Нехай $u(x, y, \omega)$ – випадкове поле з математичним очікуванням $M\,u(x, y, \omega) = 0$, $x, y \in \mathbb{R}_2$ або $x, y \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z}$ –множина цілих чисел), $\omega \in \Omega$, де Ω – імовірнісний простір, і кореляційною функцією $K(u_1, u_2, v_1, v_2) = Mu(x_1, y_1, \omega)\overline{u(x_2, y_2, \omega)}$. Якщо у випадку $x, y \in \mathbb{R}_2$ кореляційна функція неперервна, то $u(x, y, \omega)$ можна занурити в гильбертів простір $H_u = \overline{\underset{k,j}{V} u(x_k, y_j)}$, і тоді кореляційну функцію можна зобразити як скалярний добуток у гильбертовому просторі $K(x_1, x_2, y_1, y_2) = \langle u_{x_1, y_1}, u_{x_2, y_2} \rangle_{H_u}$, де $u_{x,y}$ – двопараметрична сім'я елементів у гільбертовому просторі H_u, що відповідає початковому полю $u(x, y, \omega)$. Надалі $u_{x,y}$ називатимемо *поверхнею у гільбертовому просторі* H_u.

Поле $u(x, y, \omega)$ називатимемо *квазіоднорідним*, якщо

$$M\left|\sum_{i,j=1}^{N_1,N_2} a_i b_j u\left(x_i + \tau_1, y_j + \tau_2\right)\right|^2 \le \chi M \left|\sum_{i,j=1}^{N_1,N_2} a_i b_j u\left(x_i, y_j\right)\right|^2, \quad (1)$$

де $0 < \chi < \infty$.

Якщо поле однорідне, то в (1) нерівність переходить в рівність, і $\chi = 1$.

В термінах кореляційних функцій (1) переходить в нерівність

$$\sum_{i,j,p,q=1}^{N_1,N_2} K\left(x_i + \tau_1, y_j + \tau_2, x_p + \tau_1, y_q + \tau_2\right) a_{ij} \overline{a_{pq}} \le$$

$$\le \chi \sum_{i,j,p,q=1}^{N_1,N_2} K\left(x_i, y_j, x_p, y_q\right) a_{ij} \overline{a_{pq}}. \quad (2)$$

Клас таких процесів позначатимемо G_{qv}.

Теорема 1. *Нехай* $u_{x,y} \in G_{qv}$, $x, y \in \mathbb{R}_2$. *Тоді* $v_{x,y} = Bu_{x,y} \in G_{qv}$, *де* $u_{x,y}$ *– відповідна поверхня в гільбертовому просторі* H_u, *а* B *– лінійний оборотний обмежений оператор.*

Доведення. З (1) витікає, що існує стала $\chi > 0$ така, що

$$M\left|\sum_{i,j=1}^{N_1,N_2} a_i b_j u\left(x_i+\tau_1, y_j+\tau_2\right)\right|^2 \le \chi M\left|\sum_{i,j=1}^{N_1,N_2} a_i b_j u\left(x_i, y_j\right)\right|^2 .$$

З того що B є обмеженим і лінійним витікає, що

$$M\left|\sum_{i,j=1}^{N_1,N_2} a_i b_j v\left(x_i+\tau_1, y_j+\tau_2\right)\right|^2 = M\left|\sum_{i,j=1}^{N_1,N_2} a_i b_j Bu\left(x_i+\tau_1, y_j+\tau_2\right)\right|^2 \le$$

$$\le \|B\|^2 M\left|\sum_{i,j=1}^{N_1,N_2} a_i b_j v\left(x_i+\tau_1, y_j+\tau_2\right)\right|^2 \le \|B\|^2 \chi M\left|\sum_{i,j=1}^{N_1,N_2} a_i b_j u\left(x_i, y_j\right)\right|^2 .$$

Але, $u_{x,y} = B^{-1} v_{x,y}$ і, отже,

$$M\left|\sum_{i,j=1}^{N_1,N_2} a_i b_j u\left(x_i, y_j\right)\right| \le \left\|B^{-1}\right\|^2 M\left|\sum_{i,j=1}^{N_1,N_2} a_i b_j v\left(x_i, y_j\right)\right| .$$

Тоді $v_{x,y} \in G_{qv}$.

Властивості (1) і (2) означають, що існує двопараметрична група $T_{t,s}$ ($T_{t,s} u_{x,y} = u_{x+t,y+s}$) обмежених операторів зсуву в H_u с $\left\|T_{t,s}\right\| \le \chi$, $t, s \in \mathbb{R}_2$.

Лема 1. *Нехай* $T_{t,s}$ *– двопараметрична група лінійних обмежених операторів у гільбертовому просторі* H_u, *яка задовольняє умові* $\left\|T_{t,s}\right\| \le \chi$ $\forall t, s \in \mathbb{R}_2$; *тоді існує лінійний обмежений самоспряжений оператор* B, *який діє в* H_u, *з обмеженим оберненим* B^{-1}, *такий що оператор* $U_{t,s} = B^{-1} T_{t,s} B$ *– унітарний оператор в* H_u $\forall t, s \in \mathbb{R}_2$.

Доведення. Нехай E – множина усіх дійсних обмежених функцій двох змінних $t, s \ge 0$. Визначимо функціонал $p\left(\xi\left(t,s\right)\right)$:

$$p\left(\xi\left(t,s\right)\right) = \min_{\sigma,\tau}\left[\overline{\lim_{\sigma,\tau}} \frac{1}{N_1} \frac{1}{N_2} \sum_{k=1}^{N_1} \sum_{l=1}^{N_2} \xi\left(\sigma_k + t, \tau_l + s\right)\right],$$

де $\sigma = \left(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_{N_1}\right)$, $\tau = \left(\tau_1, \tau_2, ..., \tau_{N_2}\right)$ – довільні.

Функція $p\left(\xi\left(t,s\right)\right)$, що очевидно, задовольняє умовам:

1) $p\left(\xi+\eta\right)\le p\left(\xi\right)+p\left(\eta\right)$,

2) $p\left(a\xi\right)=ap\left(\xi\right), \quad a\ge 0$,

3) $a\le p\left(\xi\right)\le b$, якщо тільки $a\le \xi\left(t,s\right)\le b$.

З 1) і 2) витікає, що існує лінійний обмежений функціонал $L\left(\xi\right)$ такий, що $L\left(\xi\right)\le p\left(\xi\right)$. Крім того, з 3) отримаємо, що з умови $\xi\left(t,s\right)\ge 0$ витікає

$$p\left(\xi\right)\ge 0 \text{ і } p\left(-\xi\right)\le 0,\ L\left(-\xi\right)\le p\left(-\xi\right)\le 0,\ L\left(\xi\right)=-L\left(-\xi\right)\ge 0.$$

З іншого боку

$$L\left(\xi\left(t+t_0,s+s_0\right)\right)=L\left(\xi\left(t,s\right)\right), \quad \forall t_0,s_0\ge 0.$$

Насправді, нехай $\eta\left(t,s\right)=\xi\left(t+t_0,s+s_0\right)-\xi\left(t,s\right)$. Тоді $\forall N_1,N_2$

$$p\left(\eta\right)\le \frac{1}{N_1}\frac{1}{N_2}\overline{\lim_{\substack{t\to\infty\\ s\to\infty}}}\frac{1}{N_1}\frac{1}{N_2}\sum_{k=1}^{N_1}\sum_{l=1}^{N_2}\eta\left(\sigma_k+t,\tau_l+s\right)=$$

$$=\frac{1}{N_1}\frac{1}{N_2}\overline{\lim_{\substack{t\to\infty\\ s\to\infty}}}\frac{1}{N_1}\frac{1}{N_2}\sum_{k=1}^{N_1}\sum_{l=1}^{N_2}[\xi\left(\sigma_k+t+t_0,\tau_l+s+s_0\right)-\xi\left(\sigma_k+t,\tau_l+s\right)].$$

Через те що

$$\xi\left(\sigma_k+t+t_0,\tau_l+s+s_0\right)-\xi\left(\sigma_k+t,\tau_l+s\right)=\xi\left(\sigma_k+t+t_0,\tau_l+s+s_0\right)-$$
$$-\xi\left(\sigma_k+t+t_0,\tau_l+s\right)+\xi\left(\sigma_k+t+t_0,\tau_l+s\right)-\xi\left(\sigma_k+t,\tau_l+s\right),$$

то

$$p\left(\eta\right)\le \frac{1}{N_1}\frac{1}{N_2}\overline{\lim_{\substack{t\to\infty\\ s\to\infty}}}\sum_{k=1}^{N_1}\sum_{l=1}^{N_2}\xi\left(\sigma_k+t+t_0,\tau_l+s+s_0\right)-\xi\left(\sigma_k+t+t_0,\tau_l+s\right)+$$
$$+\frac{1}{N_1}\frac{1}{N_2}\overline{\lim_{\substack{t\to\infty\\ s\to\infty}}}\sum_{k=1}^{N_1}\sum_{l=1}^{N_2}\xi\left(\sigma_k+t+t_0,\tau_l+s\right)-\xi\left(\sigma_k+t,\tau_l+s\right).$$

Оберемо $\sigma_k=\left(k-1\right)t_0, \quad \tau_k=\left(l-1\right)s_0$, тоді неважко показати, що

$$p\left(\eta\right)\le \frac{4\max\{N_1,N_2\}\max\left|\xi\right|}{N_1N_2}.$$

Через справедливість оцінки $\forall N_1,N_2$ витікає $p\left(\eta\right)\le 0$.

Аналогично можна показати, що $p\left(-\eta\right)\le 0$. Тоді

$$L\left(\eta\right)=-L\left(-\eta\right)\ge -p\left(-\eta\right)\ge 0, \quad L\left(\eta\right)=0.$$

Функціонал $L\left(\xi\right)$ задовольняє умові $L\left(1\right)=1$. Насправді, через те, що

$p(1)=1, \quad p(-1)=-1$, то $L(1)\le 1$ і $-L(-1)=L(1)\ge -p(-1)=1$.

З поняття „узагальненої границі" для функцій можна визначити „узагальнену границю" для послідовностей $\{\xi(n,m)\}$ з властивостями:

а) $L(a\xi(n,m)+b\eta(n,m))=aL(\xi(n,m))+bL(\eta(n,m))$,

б) $L(\xi(n,m))\ge 0$, якщо $\xi(n,m)\ge 0$,

в) $L(\xi(n+n_0,m+m_0))=L(\xi(n,m)), \quad n_0,m_0\ge 0$,

г) $L(1)=1$.

Зауваження. Можна визначити $L(\xi(n,m))$ як $L(\xi(t,s))$, де $\xi(t,s)=\xi([t],[s])$, $[t],[s]$ – цілі частини t,s відповідно.

Нехай f,g – елементи з H, тоді послідовність

$\xi(n,m)=(T(n,m)f,T(n,m)g)$ обмежена, $|\xi(n,m)|\le c^2\|f\|\cdot\|g\|$, $c>0$.

Визначимо ермітово-білінійну форму $\langle f,g\rangle = L(T(n,m)f,T(n,m)g)$. Тоді маємо

$$\frac{1}{c}\le \frac{\|T(n,m)f\|}{\|T(-n,-m)T(n,m)f\|}=\frac{\|T(n,m)f\|}{\|f\|}\le c.$$

З умов *а), б), в)* отримаємо, що

$$\frac{1}{c^2}\|f\|^2\le\langle f,f\rangle\le c^2\|f\|^2.$$

Застосовуючи відому теорему про обмежені білінійні форми, отримаємо, що існує самоспряжений обмежений оператор A, який діє в H і такий, що $\langle f,g\rangle=(Af,g)$.

Оператор A, очевидно, задовольняє умові

$$\frac{1}{c^2}I\le A\le c^2 I.$$

З іншого боку, з *в)* витікає, що

$$(AT(h_1,h_2)f,T(h_1,h_2)g)=L(T(h_1+n,h_2+m)f,T(h_1+n,h_2+m)g)=$$
$$=L(T(n,m)f,T(n,m)g)=(Af,g),$$

тобто

$$[T(h_1,h_2)]^* AT(h_1,h_2)=A. \tag{3}$$

Нехай $B=A^{\frac{1}{2}}$, тоді $\frac{1}{c}I\le B\le cI$ і $\frac{1}{c}I\le B^{-1}\le cI$. З (3) отримаємо, що

$$B^{-1}\left(\left[T\left(h_1,h_2\right)\right]^* BBT\left(h_1,h_2\right)\right)B^{-1} = B^{-1}\left(BB\right)B^{-1} =$$

$$=\left(BT\left(h_1,h_2\right)B^{-1}\right)^*\left(BT\left(h_1,h_2\right)B^{-1}\right) = I .$$

Це означає, що оператор $U\left(h_1,h_2\right) = BT\left(h_1,h_2\right)B^{-1}$ унітарний.

Зауважимо, що ми довели унітарність $U\left(h_1,h_2\right)$, коли $h_1,h_2 \ge 0$. Якщо $h_1,h_2 \le 0$, то

$$U\left(h_1,h_2\right) = BT\left(h_1,h_2\right)B^{-1} = BT\left(-h_1,-h_2\right)B^{-1} = \left(BT\left(-h_1,-h_2\right)B^{-1}\right)^{-1};$$

отже, в цьому випадку $U\left(h_1,h_2\right)$ також унітарний.

Якщо $h_1 \ge 0, h_2 \le 0$, то

$$U\left(h_1,h_2\right) = BT\left(h_1,0\right)T\left(0,h_2\right)B^{-1} = \left[BT\left(h_1,0\right)B^{-1}\right]\left[BT\left(0,h_2\right)B^{-1}\right],$$

тобто і в цьому випадку оператор $U\left(h_1,h_2\right)$ унітарний. Лема доведена.

Теорема 2. *Нехай $v_{x,y} \in G_{qv}$, $x, y \in \mathbb{R}_2$. Тоді існує однорідне поле $u_{x,y}$ і лінійний обмежений самоспряжений оператор B, який діє в H_u, з обмеженим оберненим B^{-1}, такий що $v_{x,y} = Bu_{x,y}$.*

Доведення. Через те що $v_{x,y} \in G_{qv}$, то двопараметрична сім'я операторів зсуву $T_{t,s}$ утворюють двопараметричну групу лінійних обмежених операторів у гільбертовому просторі H_u і $v_{x,y} = T_{t,s}v_{x,y}\left(0\right)$. Тоді за лемою, існує лінійний обмежений самоспряжений оператор B, який діє в H_u, з обмеженим оберненим B^{-1}, такий що оператор $U_{t,s} = B^{-1}T_{t,s}B$ – унітарний оператор в H_u $\forall t,s \in \mathbb{R}_2$. Нехай $u_{x,y}$ визначається наступним чином: $u_{x,y} = U_{t,s}B^{-1}v_{x,y}\left(0\right)$. Тоді

$$v_{x,y} = T_{t,s}v_{x,y}\left(0\right) = BU_{t,s}B^{-1}v_{x,y}\left(0\right) = Bu_{x,y} .$$

Лема 2. *Нехай $z\left(n,m\right)$ – біле дискретне поле, тобто $Mz\left(n,m\right) = 0$, а $Mz\left(m,n\right)\overline{z\left(p,q\right)} = \delta_{mn}\cdot\delta_{pq}$. Нехай B – лінійний оператор в $L_z = \underset{n,m}{V} z\left(n,m\right)$ (L_z лінійна оболонка $z\left(n,m\right)$) і $B\left|z\left(n,m\right)\right|^2 = B\left\|z\left(n,m\right)\right\|^2 < C, \quad C > 0$. Тоді B може бути розширеним до обмеженого оператора в $\overline{L}_z = H_z$.*

Доведення. Нехай $z(n,m)=\sum\limits_{i,j=1}^{n,m} a_{i,j} z(i,j)$ є елементом L_z. Тоді твердження леми витікає з нерівності

$$M\left|Bz(n,m)\right|^2 = M\left|\sum_{i,j=1}^{n,m} a_{i,j} Bz(i,j)\right|^2 \le \sum_{i,j=1}^{n,m} M\left|a_{i,j} Bz(i,j)\right|^2 \le C\sum_{i,j=1}^{n,m}\left|a_{i,j}\right|^2 = CM\left|z\right|^2,$$

і обмеженість B очевидна.

Теорема 3. *Нехай дискретне випадкове поле має вигляд*

$$u(n,m)=\sum_{p,q=-\infty}^{\infty} h(n-p,m-q)\,g(p,q)\,w(p,q), \qquad (4)$$

де $w(n,m)$ *– дискретний білий шум та існують дві константи* C_1 *і* C_2 *такі, що* $C_1 \le \left|g(p,q)\right|^2 \le C_2$. *Тоді* $u(n,m)\in G_{qv}$.

Доведення. За означенням $u(n,m)$ маємо

$$M\left|\sum_{p,q=1}^{N_1,N_2} a_p b_q u(n+p,m+q)\right|^2 = \sum_{p,q=1}^{N_1,N_2}\sum_{r,s=1}^{N_1,N_2} a_p \overline{a_r} b_q \overline{b_s} Mu(n+p,m+q)\cdot\overline{u(n+r,m+s)} =$$

$$= \sum_{p,q=-\infty}^{\infty}\left|g(p+n,q+m)\right|^2 \sum_{p,q=1}^{N_1,N_2}\sum_{r,s=1}^{N_1,N_2} a_p \overline{a_r} b_q \overline{b_s} h(n-p,m-q)\overline{h(n-r,m-s)}.$$

Через те, що

$$\sum_{p,q=1}^{N_1,N_2}\sum_{r,s=1}^{N_1,N_2} a_p \overline{a_r} b_q \overline{b_s} h(n-p,m-q)\overline{h(n-r,m-s)} = \left|\sum_{p,q=1}^{N_1,N_2} a_p b_q h(n-p,m-q)\right|^2 \ge 0,$$

та

$$\left|g(p+n,q+m)\right|^2 = \frac{\left|g(p+n,q+m)\right|^2\left|g(p,q)\right|^2}{\left|g(p,q)\right|^2} \le C_2 C_1^{-1}\left|g(p,q)\right|^2,$$

маємо

$$M\left|\sum_{p,q=1}^{N_1,N_2} a_p b_q u(n+p,m+q)\right|^2 \le$$

$$\le C_2 C_1^{-1}\sum_{p,q=-\infty}^{\infty}\left|g(p,q)\right|^2 \sum_{p,q=1}^{N_1,N_2}\sum_{r,s=1}^{N_1,N_2} a_p \overline{a_r} b_q \overline{b_s} h(n-p,m-q)\overline{h(n-r,m-s)} =$$

$$= C_2 C_1^{-1} M \left| \sum_{p,q=1}^{N_1,N_2} a_p b_q u(n+p,m+q) \right|^2 .$$

Отже, $u(n,m) \in G_{qv}$.

Теорема 4. *Нехай поле має вигляд*

$$u(x,y) = \iint_{-\infty}^{\infty} h(x-\xi, y-\eta) g(\xi,\eta) dZ(\xi,\eta),$$

де $Z(\xi,\eta)$ *– поле з ортогональними приростами з* $M|Z(\xi,\eta)|^2 = dxdy$ *та існують дві константи* C_1 *і* C_2 *такі, що* $C_1 \le |g(\xi,\eta)|^2 \le C_2$. *Тоді* $u(x,y) \in G_{qv}$.

Доведення. Маємо

$$M \left| \sum_{p,q=1}^{N_1,N_2} a_p b_q u(x+p, y+q) \right|^2 = \iint_{-\infty}^{\infty} |g(\xi+p, \eta+q)|^2 \left| \sum_{p,q=1}^{N_1,N_2} a_p b_q h(x-p, y-q) \right|^2 dpdq.$$

Подальші міркування аналогічні міркуванням при доведенні теореми 3.

Висновки. У статті введено клас неоднорідних випадкових полів, який є аналогом майже стаціонарних в широкому сенсі випадкових процесів UBLS. В роботі реалізовано операторний підхід до вивчення одного класу неоднорідних випадкових полів. Відзначимо, якщо два UBLS поля некорельовані, то сума і добуток таких полів також є UBLS полем. На цьому шляху можливо отримання канонічних зображень полів у вигляді суперпозицій „елементарних” некорельованих UBLS полів. Розробка кореляційної теорії такого класу неоднорідних полів може бути перспективною для розв’язання багатовимірних прикладних задач.

Список літератури: **1.** *Яглом А.М.* Введение в теорию стационарных случайных функций // УМН. – 1952. –Том 1. – Вып.5(51),– С.3-168. **2.** *Яглом А.М.* Корреляционная теория процессов со случайными n-ми приращениями // Мат. сборник –1955. – Т.37(79), №1,– С.141-196. **3.** *Пугачев В.С., Синицын И.Н.* Теорія стохастических систем // М.: Логос, 2004. – 1000с. **4.** *Аббауи Л.* Об одном классе неоднородных случайных полей // Вестн. Харьк.ун-та. Сер. Механика, теория управления и математическая физика. – Харьков, 1984. – № 254. – С.49-53. **5.** *Шаронова Н.В., Черемская Н.В.* Корреляционная теория одного класса неоднородных случайных полей // Вестник Херсонского технического университета.– 2004. – №1(19). – С.343-348. **6.** *Dag Tjostheim and Jonh B.Thomas* Some Properties and Examples of Random Processes that Are Almost Wide Sense Stationary // IEEE Trans. on Information Theory, v.21, №3, 1975, p. 257-262. **7.** *Лившиц М.С., Янцевич А.А.* Теория операторнх узлов в гильбертовых пространствах / Харьков: Изд-во ХГУ, 1971. – 160с.

Надійшла до редколегії 31.03.11